



ISSN 2959-1953
ISSN 2959-1961
<https://osvita.eeipsy.org>
<https://doi.org/10.38014/osvita.2023.91.17>

ТИТАРЕНКО Н.Є.,
Мелітопольський державний
педагогічний
університет імені Богдана
Хмельницького
м. Мелітополь, Україна

ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УКРАЇНСЬКИХ ШКОЛЯРІВ ЗА КОРДОНОМ

TYTARENKO N.Ye. Differences in teaching mathematics Ukrainian schoolchildren abroad. *The article is devoted to the differences of the education of students under military situation. Distance learning is considered as a means to restore children's stability, communication with peers, satisfaction with their own achievements, and involvement in interesting joint projects. Attention is focused on the significant influence of the mathematics teacher on the development of critical thinking, the ability of students to use mathematical knowledge in everyday life and in future professional activities. The article highlights the problems faced by Ukrainian children when attending schools abroad: language barrier, teaching subjects in another language, differences in educational programs and evaluation systems, separation from friends and relatives, uncertainty of the future. The article analyzes the differences in approaches to solving mathematical problems in German and Ukrainian textbooks, in particular, on the examples of plotting a graph of a linear function, drawing up a tangent equation.*

Keywords: war, distance learning, study abroad, special classes, education systems, application of mathematics, algorithms, linear function, derivative, tangent.

ТИТАРЕНКО Н.Є. Особливості навчання математики українських школярів за кордоном. *Стаття присвячена особливостям навчання учнів в умовах воєнного стану. Розглядається дистанційне навчання як засіб повернути дітям стабільність, спілкування з однолітками, задоволення від власних досягнень, залученість до цікавих спільних проєктів. Акцентується увага на вагомому впливі вчителя математики на розвиток критичного мислення, здатності учнів використовувати*

математичні знання в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності. В статті висвітлюються проблеми, з якими стикаються українські діти, відвідуючи школи за кордоном: мовний бар'єр, викладання предметів на іншій мові, відмінність у освітніх програмах та системах оцінювання, відірваність від друзів і близьких, невизначеність майбутнього. В статті аналізуються відмінності підходів до розв'язання математичних задач в німецьких та українських підручниках, зокрема, на прикладах побудови графіка лінійної функції, складання рівняння дотичної.

Ключові слова: воєнний стан, дистанційне навчання, навчання за кордоном, спецкласи, системи освіти, застосування математики, алгоритми, лінійна функція, похідна, дотична.

Вступ. Вже майже рік в Україні триває війна: непередбачувана, руйнівна, жахлива... Українці щодня втрачають домівки, здоров'я, рідних, життя... Настрій дорослих коливається від надії на перемогу до глибокого відчаю, від пошуків роботи до відсутності грошей на продукти, від гарних новин з фронту до неможливості зв'язатися з рідними. А що ж наші діти? Деякі стали свідками жахливих подій і потребують медичної або психологічної допомоги, деякі тремтять від кожного звуку нової сирени і відчують небезпеку у власному домі, деякі опинилися в іншій країні, втратили зв'язок з друзями і близькими і не можуть адаптуватися на новому місці.

Переважає більшість дітей сховалася у віртуальному світі. Мета дорослих - батьків, вчителів - повернути дітей до щоденних звичайних справ, ритуалів, поновити втрачені зв'язки з однолітками, залучити їх до активного спілкування. Навчання зараз - це психологічно-стабілізуючий чинник. Вчитель може впливати на емоційний стан учнів, перемикаючи їх увагу, залучати до цікавих проєктів, звертати увагу батьків на стан дитини. Уроки - це «місточок між їх стабільним минулим і мінливим теперішнім».

Постановка задачі. В процесі дистанційного навчання, крім класного керівника, найбільше з учнями спілкується вчитель математики (до 9 годин на тиждень). Він може привертати увагу дітей, заохочувати їх до самостійних досліджень за допомогою:

- 1) Візуалізації навчання засобами комп'ютерних презентацій, програмних засобів навчання, використання електронних платформ.
- 2) Залучення дітей до конструювання геометричних фігур і дій над ними.
- 3) Орієнтації завдань на застосування математики у реальному житті.
- 4) Використання задач патріотичного спрямування.

Рятуючись від війни, за кордоном опинились не лише діти, а й чисельна група вчителів, які проводять онлайн-уроки в українських закладах освіти та намагаються інтегруватися в іншомовне середовище. Деякі з них влаштувалися вчителями і можуть спостерігати навчальний процес зсередини. Інші - мають дітей шкільного

віку і на собі відчувають розбіжності в системах освіти. Наші допитливі освітяни мають змогу порівняти будову шкільних систем, освітні програми, зміст та спрямованість підручників.

Згідно з даними Центрального реєстру іноземців Німеччини, в країні зареєстровано понад мільйон українських біженців. Близько 35 відсотків з них - діти та підлітки до 18 років, більшість – учні початкової школи. За німецьким законом, усі вони зобов'язані ходити до школи. Діти без знання німецької мови вчаться у спеціальних “willkommen” класах, де приділяють найбільшу увагу вивченню мови. Також вони відвідують і німецькі класи, але на один-два класи нижче, ніж вдома. Незрозуміло, як учні будуть надолужувати пропущений матеріал після повернення додому, адже зараз далеко не всі витримують подвійне навантаження в німецькій та українській школах. Тому деякі науковці закликають залучати до навчального процесу вчителів з України. Але тут виникають свої проблеми – з визнанням дипломів та знанням мови. Також важливо, щоб українським дітям додатково викладали й рідною мовою та за українською програмою. Інакше існує небезпека, що вони втратять зв'язок із українською освітньою системою.

Перебуваючи у Німеччині, я мала можливість ознайомитися з навчальним процесом у німецькій гімназії, зокрема, в розділі математичної освіти. Звернула увагу, що для розв'язання певних задач пропонуються інші алгоритми, іноді цікаві, іноді досить складні для сприйняття не тільки українськими (інша мова, позначення, терміни), а й німецькими учнями.

Це спонукало до глибшого занурення у німецьку шкільну математику, порівняння й аналізу методів, прийомів, алгоритмів розв'язання однакових завдань в підручниках двох країн: України та Німеччини. Деякі методи виявилися цікавими - з перспективою на наступні класи, інші - надто ускладненими, важкими для більшості учнів.

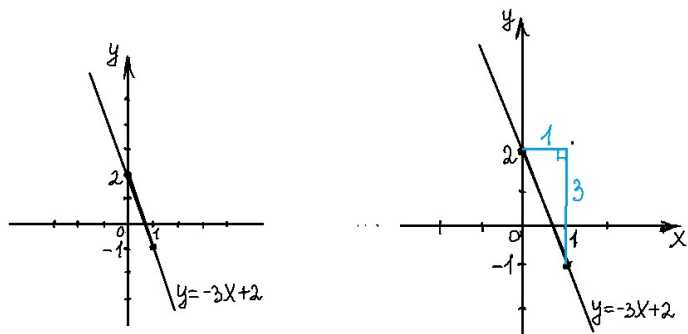
Для ілюстрації розглянемо два завдання: побудова прямої за її рівнянням з кутовим коефіцієнтом (7 клас) та складання рівняння дотичної до графіка функції (10, 11 класи).

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = -3x + 2$ [1]

Розв'язання. Спочатку пригадуємо з класом, що це лінійна функція, графіком її є пряма, яка однозначно визначається двома точками на площині. Отже, складаємо таблицю значень заданої функції для двох довільних значень аргументу:

Позначивши на площині точки (0; 2) і (1; -1), проведемо через них пряму, яка і буде графіком шуканої функції (мал.1, 2).

x	0	1
y	2	-1



Мал.1. Побудова прямої двома способами

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = -3x + 2$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень даної функції для двох довільних значень аргументу:

x	0	1
y	2	-1

Позначимо на координатній площині точки $(0; 2)$ і $(1; -1)$ та проведемо через них пряму (рис. 31). Ця пряма є графіком лінійної функції $y = -3x + 2$.

У формулі $y = kx + b$, яка задає лінійну функцію, припустимими є й випадки, коли $k = 0$ та/або $b = 0$.

Розглянемо випадок, коли $b = 0$ і $k \neq 0$. Тоді формула набуває вигляду $y = kx$. Звідси для всіх значень аргументу, відмінних від нуля, можна записати, що $\frac{y}{x} = k$. Ця формула показує, що для функції $y = kx$

Рис. 31

Мал.2. Побудова прямої в українському підручнику [1]

Тепер побудуємо цю пряму за рекомендаціями німецького підручника. Перш за все, шукається точка перетину прямої з віссю OY підстановкою в функцію $x = 0$ (можна було б звернути увагу на геометричний зміст коефіцієнта b (вільного члена) в рівнянні прямої: b - це відрізок, який пряма відтинає на осі OY , тобто, оскільки $b = 2$, то пряма проходить через т. $(0; 2)$).

Bei der Funktion handelt es sich um eine lineare Funktion der Form $f(x) = m \cdot x + b$, das ist eine Gerade. Mit zwei Punkten können wir eine Gerade exakt bestimmen.

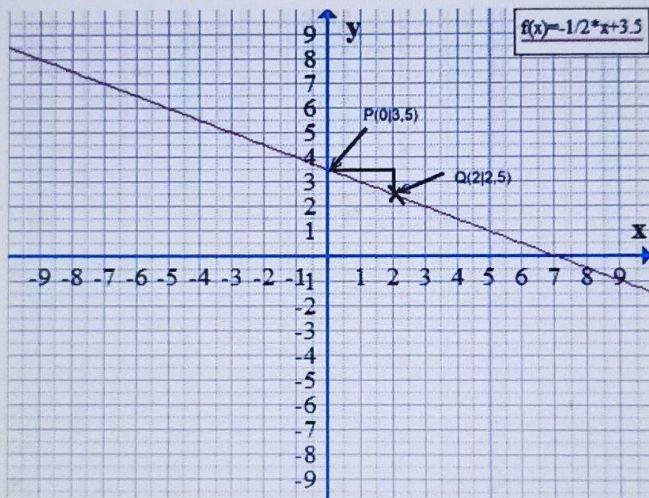
Den ersten Punkt P erhalten wir:

b ist der y-Achsenabschnitt der Funktion, d.h. in diesem Punkt ist $x = 0$. Der Graph schneidet im Punkt $P(0|3,5)$ die y-Achse.

Den zweiten Punkt Q erhalten wir mit Hilfe der Steigung m , das ist hier $-\frac{1}{2}$.

Vom Punkt P aus tragen wir nun das Steigungsdreieck an, $m = \frac{-1}{2} = \frac{-y}{x}$

Wir gehen vom Punkt P aus 2 Einheiten in die positive x-Richtung (+2) und 1 Einheit in die negative y-Richtung (-1). Der zweite Punkt Q hat damit die Koordinaten $Q(2|2,5)$.



Zwei Punkte bestimmen eindeutig eine Gerade. Durch verbinden der beiden Punkte erhalten wir den Funktionsgraphen:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x - 3,5$$

Мал.3. Побудова прямої у німецькому підручнику [4]

Для пошуку другої точки прямої використовується кутовий коефіцієнт k прямої (в німецькому підручнику: нахил m). Оскільки $k = -3 = \frac{-3}{1}$, то від точки $(0; 2)$ відкладаємо вправо (завжди!) по горизонталі відрізок довжиною 1 (див. знаменник) і вниз по вертикалі відрізок довжиною 3, тому що в чисельнику стоїть -3 (якщо було б +3, то вгору). Таким чином, отримуємо другу точку прямої $(1; -1)$, а через дві точки проходить єдина пряма.

Висновок. Це досить простий і цікавий спосіб побудови прямої. Він обумовлює подальше вивчення прямокутного трикутника і тригонометричних функцій у 8, 9 класах та рівняння дотичної у 10, 11 класах. Дійсно, якщо згадати, що $k = \frac{\text{протилеглий катет}}{\text{прилеглий катет}} = \tan \alpha$, то стає зрозумілим цей "хід конем" на 1 одиницю вправо (прилеглий катет) та на 3 одиниці вниз (протилеглий катет) (мал.1, 3). До того ж можна актуалізувати вертикальні і суміжні кути, які вже вивчаються в сьомому класі, проілюструвати властивість: суміжні кути до рівних кутів є рівними.

Приклад 2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = 2 - 4x - 3x^2 \text{ у точці з абсцисою } x_0 = 2 \quad [2]$$

Розв'язання. Спочатку пригадаємо, що дотична - пряма $y = kx + b$, яка має з графіком функції єдину спільну точку (x_0, y_0) та геометричний зміст похідної: $f'(x_0) = k = \tan \alpha$. Отже, маємо наступну послідовність дій:

1) знайти значення функції в т. x_0

$$y_0 = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = 2 + 8 - 12 = -2$$

2) знайти похідну функції $f(x)$

$$f'(x) = 0 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2x = -4 - 6x$$

3) знайти кутовий коефіцієнт k дотичної, тобто похідну в точці x_0

$$k = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = -4 + 12 = 8$$

4) скласти рівняння дотичної за формулою $y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y + 2 = 8 \cdot (x - 2), \quad y = 8x + 14 \quad - \text{рівняння дотичної.}$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = \sqrt{2x+4}, \text{ що проходить через точку } P(-1|\sqrt{2}) \quad [3]$$

Розв'язання.

1) визначити умови $f(u)$ та $f'(u)$

$$f(u) = \sqrt{2u+4}; \quad f'(u) = \frac{1}{\sqrt{2u+4}}$$

2) скласти загальне рівняння дотичної в точці $B(u | f(u))$

$$y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2u+4}} \cdot (x - u) + \sqrt{2u+4}$$

3) провести точковий тест з $P(-1 | \sqrt{2})$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2u+4}} \cdot (-1 - u) + \sqrt{2u+4} \quad | \cdot \sqrt{2u+4} \quad D_u: u > -2$$

$$-1 - u + 2u + 4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2u+4}; \quad u + 3 = \sqrt{4u+8} \quad |^2$$

$$u^2 + 6u + 9 = 4u + 8; \quad u^2 + 2u + 1 = 0 \quad (u + 1)^2 = 0 \quad u_{1,2} = -1$$

4) визначити координати точки дотику

$$u = -1, \quad f(-1) = \sqrt{2}, \quad B(-1 | \sqrt{2})$$

5) підставити у загальне рівняння дотичної:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (-1) + 4}} \cdot (x + 1) + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(мал. 4).

Bestimmung einer Gleichung der Tangente von außen

Allgemein

1. Terme $f(u)$ und $f'(u)$ bestimmen.
2. Allgemeine Tangentengleichung im Punkt $B(u|f(u))$ aufstellen.
3. Punktprobe mit $Q(q|r)$ durchführen.
4. Lösungen $u_1, u_2 \dots$ und Koordinaten der Berührungspunkte $B_1, B_2 \dots$ ermitteln.
5. In die allgemeine Tangentengleichung einsetzen.

Unter einer **Normalen von außen** versteht man eine Normale an den Graphen G_f einer Funktion f , die durch einen vorgegebenen Punkt Q verläuft, der nicht auf G_f liegt. Um eine Gleichung einer solchen Normalen zu bestimmen, geht man in den gleichen fünf Schritten wie oben vor, ersetzt dabei allerdings in Schritt 2 die Tangenten- durch die Normalengleichung.

Beispiel: f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3$ und $Q(1|0)$

1. $f(u) = \frac{1}{2} \cdot u^3$; $f'(u) = \frac{3}{2} \cdot u^2$
2. $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
 $= \frac{3}{2} u^2 \cdot (x - u) + \frac{1}{2} u^3$
3. $Q(1|0)$, also $0 = \frac{3}{2} u^2 \cdot (1 - u) + \frac{1}{2} u^3$ bzw.
 $0 = -u^3 + \frac{3}{2} u^2 = u^2 \cdot (-u + \frac{3}{2})$
4. Satz vom Nullprodukt: $u_1 = 0$; $u_2 = \frac{3}{2}$
 $B_1(0|0)$; $B_2(\frac{3}{2} | \frac{27}{16})$
5. Tangente t_1 : $y = 0$
Tangente t_2 : $y = \frac{27}{8} (x - \frac{3}{2}) + \frac{27}{16} = \frac{27}{8} x - \frac{27}{8}$

Zur Veranschaulichung:

Мал.4. Побудова дотичної у німецькому підручнику [3]

Висновок. Цей алгоритм передбачає складання рівняння дотичної, що проходить через точку поза кривою і передбачає знаходження координат точки дотику. Якщо ж запропонована точка є точкою дотику, то алгоритм співпадає зі способом розв'язання в українському підручнику. В прикладі 3 вказана точка виявилась точкою дотику, а в прикладі 4 – точкою поза кривою.

Приклад 4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3, \text{ що проходить через точку } Q(1|0) \quad [3]$$

Розв'язання.

$$1) f(u) = \frac{1}{2} \cdot u^3; f'(u) = \frac{3}{2} \cdot u^2$$

$$2) y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

$$y = \frac{3}{2} u^2 \cdot (x - u) + \frac{1}{2} \cdot u^3$$

$$3) Q(1|0), \text{ тобто } 0 = \frac{3}{2} u^2 \cdot (1 - u) + \frac{1}{2} \cdot u^3$$

$$0 = -u^3 + \frac{3}{2} u^2 = u^2 \cdot (-u + \frac{3}{2})$$

$$4) \text{ Маємо } u_1 = 0; u_2 = \frac{3}{2}$$

$$B_1(0|0); B_2(\frac{3}{2} | \frac{27}{16})$$

$$5) \text{ Дотична } t_1: y = 0$$

$$\text{Дотична } t_2: y = \frac{27}{8} (x - \frac{3}{2}) + \frac{27}{16} = \frac{27}{8} x - \frac{27}{8}$$

Висновки. Застосування дистанційних технологій навчання сприяє розвитку критичного мислення та пізнавального інтересу здобувачів освіти, стимулює інтерес до самостійного мислення, креативності та дій. В сучасних важких умовах учні краще засвоюють структурований, візуалізований навчальний матеріал; орієнтуються на практичне використання знань; зосереджені на конкретних навчальних цілях; потребують систематичного зворотнього зв'язку. Дистанційне

навчання має бути орієнтованим на застосування математики в реальних практичних ситуаціях, в майбутній професійній діяльності, під час вивчення інших шкільних предметів.

Німеччина має дуже розгалужену систему освіти, в кожному типі навчального закладу - свої підручники, метою яких є підготовка учнів до майбутньої професії (Hauptschule, Gesamtschule, Realschule) або до вступу в університет та подальших наукових досліджень (Gymnasium). Тому спільна аналітична робота німецьких та українських вчителів може перетворитися на корисні рекомендації, що зроблять більш ефективним освітній процес обох країн та інтеграцію українських дітей в німецьке освітнє середовище.

Список використаних джерел:

1. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 7 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2015. – 256 с.: іл.
2. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.: іл.
3. Manfred Baum. Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien 11-12 Klasse / Manfred Baum und andere. – Gutersloh: Mohn Media Mohndruck GmbH, 2016.
4. Hans Freudigmann. Lambacher Schweizer 11-12: Mathematik für Gymnasien 7 Klasse / Hans Freudigmann und andere. – Stuttgart. Leipzig: Ernst Klett Verlag, 2021. – 244 s.

Transliteration of References:

1. Merzlyak A.H. (2015). Algebra: textbook for 7th grade of general educational institutions / A.G. Merzlyak, V.B. Polonsky, M.S. Anchor. Kh.: Gymnasium. 256 p.: illustrations.
2. Merzlyak A.H. (2018). Algebra and beginnings of analysis: prof. level: textbook for 10th grade institutions of general secondary education / A.G. Merzlyak, D.A. Nomirovskiy, V.B. Polonsky, M.S. Anchor. - Kh.: Gymnasium. 400 p.: illustrations.
3. Manfred Baum. Lambacher Schweizer (2016). 11-12: Mathematik für Gymnasien/ Manfred Baum und andere. Gutersloh: Mohn Media Mohndruck GmbH.
4. Hans Freudigmann. Lambacher Schweizer (2021). 11-12: Mathematik für Gymnasien 7 Klasse / Hans Freudigmann und andere. – Stuttgart. Leipzig: Ernst Klett Verlag. 244 s.



Отримано 14.02.2023
Рецензовано 23.02.2023
Допрацьовану версію отримано 25.02.2023
Прийнято до друку 27.02.2023

TYTARENKO Nataliia

Senior Lecturer of Mathematics and Physics, Department Faculty of Informatics,
Mathematics and Economics, Melitopol State Pedagogical University B.
Khmelnitsky, Melitopol, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-2272-9586>
E-mail: tolegale@gmail.com

**DIFFERENCES IN TEACHING MATHEMATICS UKRAINIAN
SCHOOLCHILDREN ABROAD***

<https://doi.org/10.38014/osvita.2023.91.17>

* публікація здійснена за рахунок спільного гранту СЄІП (Україна - Франція) та
БФ «Освіта: майбутнє»